Comparación con otras lógicas

Paula Severi

University of Leicester

Curso Julio 2018. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

Resumen de esta clase

1. Traducción de $\mathcal{ALC}$ a la lógica de predicados.
2. Traducción de $\mathcal{ALC}$ a la lógica multi-modal K_m.
3. Axiomatización de la lógica modal K (à la Hilbert).
4. Cálculo de Secuentes de $\mathcal{ALC}$. Adecuación y Completitud.

DL vs Lógica de Predicados

Traducción de $\mathcal{ALC}$ a la lógica de primer orden

- nombres de conceptos $\Leftrightarrow$ predicados unarios
- roles $\Leftrightarrow$ predicados binarios
- conceptos $\Leftrightarrow$ fórmulas con una variable libre

Traducción de conceptos a la Lógica de Predicados

$$\begin{aligned}
\pi_x(A) &= A(x) \\
\pi_x(\top) &= A_0(x) \rightarrow A_0(x) \\
\pi_x(\neg C) &= \neg(\pi_x(C)) \\
\pi_x(C \sqcap D) &= \pi_x(C) \land \pi_x(D) \\
\pi_x(\exists R.C) &= \exists y.(R(x,y) \land \pi_y(C))
\end{aligned}$$

Traducción de TBox y ABox

$$\begin{aligned}
\pi(\mathcal{T}) &= \bigwedge_{C \sqsubseteq D} (\forall x.\pi_x(C) \rightarrow \pi_x(D)) \\
\pi(\mathcal{A}) &= \bigwedge_{a:C \in \mathcal{A}} \pi_x(C)[x \mapsto a] \land \bigwedge_{(a,b):R \in C} R(a,b)
\end{aligned}$$

Traducción de TBox y ABox a lógica de predicados

Teorema

Sea $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$.

- $\mathcal{K}$ es consistente sii $\pi(\mathcal{T}) \wedge \pi(\mathcal{A})$ es satisfactible.
- $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ sii $\pi(\mathcal{T}) \to (\forall x.\pi_x(C) \to \pi_x(D))$ es válida.
- a es una instancia de C con respecto a $\mathcal{K}$ sii $\pi(\mathcal{T}) \wedge \pi(\mathcal{A}) \to \pi_x(C)[x \mapsto a]$ es válida.

Consecuencia de la traducción a Lógica de Predicados

Teorema

Los problemas de inferencia en $\mathcal{ALC}$ son todos decidibles.

Demostración

La traducción sólamente usa dos variables x, y. El fragmento de la lógica de predicados con dos variables es decidible.

DL vs Lógica Modal

Sea $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ conjunto de letras proposicionales.

Sintaxis de la Lógica Modal K

$$\varphi, \psi = p \mid \varphi \vee \psi \mid \neg\varphi \mid \Diamond\varphi$$

donde $p \in \mathcal{P}$.

- $\Diamond\varphi$: *probablemente* se cumple φ.
- $\Box\varphi$: *necesariamente* se cumple φ. Se define como $\Box\varphi \equiv \neg\Diamond\neg\varphi$.
- $\varphi \wedge \psi$ se define como $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
- $\varphi \rightarrow \psi$ se define como $\neg\varphi \vee \psi$.

Semántica de K

Estructura de Kripke $M = (S, \pi, \mathcal{K})$

1. S conjunto de *mundos* o *estados*.
2. π función de $\mathcal{P}$ en S
3. $\mathcal{K} \subseteq S \times S$ *relación de accesibilidad.*

Semántica de la Lógica Modal K

Sea $(M = (S, \pi, \mathcal{K})$ una estructura de Kripke y $s \in S$.

$$
\begin{array}{ll}
M, s \models p & \text{sii } s \in \pi(p) \\
M, s \models \varphi \vee \psi & \text{sii } M, s \models \varphi \text{ o } M, s \models \psi \\
M, s \models \neg\varphi & \text{sii } M, s \not\models \varphi \\
M, s \models \Diamond\varphi & \text{sii } M, s' \models \varphi \text{ para algún } s' \in S \text{ tal que } (s, s') \in \mathcal{K}.
\end{array}
$$

Lógica Multi-Modal K_m

Sea $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ conjunto de letras proposicionales.

Sintaxis de la Lógica Multi-Modal K_m

$$\varphi, \psi = p \mid \varphi \vee \psi \mid \neg\varphi \mid \Diamond_i \varphi$$

donde $p \in \mathcal{P}$, $1 \leq i \leq m$.

- $\Box_i \varphi$: se define como $\Box_i \varphi \equiv \neg \Diamond_i \neg \varphi$.

Semántica de K_m

Estructura de Kripke $M = (S, \pi, \{\mathcal{K}_i\}_{1 \le i \le m})$

1. S conjunto de *mundos* o *estados*.
2. π función de conjunto $\mathcal{P}$ de letras proposicionales en S
3. $\mathcal{K}_i \subseteq S \times S$ *relaciones de accesibilidad* donde $1 \le i \le m$.

Semántica de la Lógica Modal K_m

Sea $(M = (S, \pi, \{\mathcal{K}_i\}_{1 \le i \le m})$ una estructura de Kripke y $s \in S$.

$$
\begin{array}{ll}
M, s \models p & \text{sii } s \in \pi(p) \\
M, s \models \varphi \vee \psi & \text{sii } M, s \models \varphi \text{ o } M, s \models \psi \\
M, s \models \neg\varphi & \text{sii } M, s \not\models \varphi \\
M, s \models \Diamond_i \varphi & \text{sii } M, s' \models \varphi \text{ para algún } s' \in S \text{ tal que } (s, s') \in \mathcal{K}_i.
\end{array}
$$

Consecuencia semantica Local y Global en K y K_m

- $M, s \models \Gamma$ si $M, s \models \varphi$ para todo φ en Γ.
- $M \models \varphi$ si $M, s \models \varphi$ para todo $s \in S$.
- $M \models \Gamma$ si $M \models \varphi$ para todo φ en Γ.

Consecuencia semántica local

$\Gamma \models^{\mathsf{loc}} \varphi$ se define como $M, s \models \varphi$ si $M, s \models \Gamma$ para toda estructura M y $s \in S$.

Consecuencia semántica global

$\Gamma \models \varphi$ se define como $M \models \varphi$ si $M \models \Gamma$ para toda estructura M.

- Si $\Gamma \models^{\mathsf{loc}} \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$.
- Inverso no se cumple. Se tiene que $\varphi \models \Box\varphi$ pero $\varphi \not\models^{\mathsf{loc}} \Box\varphi$.

Sea $\mathsf{N_R} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ un conjunto finito de nombres de roles.

Traducción de $\mathcal{ALC}$ a K_m

Definimos una traducción de conceptos en fórmulas de K_m:

$$
\begin{array}{ll}
f(A) & = A \\
f(C \sqcup D) & = f(C) \vee f(D) \\
f(C \sqcap D) & = f(C) \wedge f(D) \\
f(\neg C) & = \neg f(C) \\
f(\exists R_i.C) & = \Diamond_i f(C) \\
f(\forall R_i.C) & = \Box_i f(C)
\end{array}
$$

Se extiende a la implicancia entre conceptos:

$$
f(C \sqsubseteq D) \quad \neg f(C) \vee f(D)
$$

Para incluir aserciones, tenemos que consider lógica modal híbrida.

Equivalencia entre $\mathcal{ALC}$ y K_m

Sea $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ una interpretación de $\mathcal{ALC}$. La estructura de Kripke asociada a $\mathcal{I}$ es $M^{\mathcal{I}} = (S^{\mathcal{I}}, \pi^{\mathcal{I}}, \{\mathcal{K}_i^{\mathcal{I}}\}_{1 \leq i \leq m})$ donde

1. $\pi^{\mathcal{I}}(p) = (p)^{\mathcal{I}}$
2. $\mathcal{K}_i^{\mathcal{I}} = (R_i)^{\mathcal{I}}$

Equivalencia entre $\mathcal{ALC}$ y K_m

1. $x \in C^{\mathcal{I}}$ si y solo si $M^{\mathcal{I}}, x \models f(C)$
2. $\models C \sqsubseteq D$ si y solo si $f(C) \models^{\mathsf{loc}} f(D)$.
3. $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ si y solo si $f(\mathcal{T}) \models f(C \sqsubseteq D)$.

Axiomatización de K à la Hilbert

Tomamos como base de conectivas: $\to$, $\neg$ y $\Box$.

Consecuencia sintáctica

Definimos $\vdash \varphi$ en forma inductiva:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{(ax1)} & \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi) \\
\textbf{(ax2)} & \vdash (\varphi \to (\psi \to \phi) \to (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \phi) \\
\textbf{(ax3)} & \vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\neg\psi \to \phi) \to \psi \\
\textbf{(MP)} & \dfrac{\vdash \varphi \quad \vdash \varphi \to \psi}{\vdash \psi}
\end{array}
$$

Axiomatización de K à la Hilbert

Tomamos como base de conectivas: $\rightarrow$, $\neg$ y $\Box$.

Consecuencia sintáctica

Definimos $\vdash \varphi$ en forma inductiva:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{(ax1)} & \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\
\textbf{(ax2)} & \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \phi) \\
\textbf{(ax3)} & \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi \\
\textbf{(MP)} & \dfrac{\vdash \varphi \quad \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\vdash \psi} \\
\textbf{(K)} & \vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi) \\
\textbf{(Gen)} & \dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}
\end{array}
$$

K regla de distribución
Gen generalización, (necessitation = obligación)

La siguiente regla no es adecuada (not sound) con respecto a la semántica local.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \Box\varphi}$$

Consecuencia local sintáctica de un conjunto de hipótesis

Sea $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Se define $\Gamma \vdash \varphi$ si $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi$.

Consecuencia sintáctica y semantica local coinciden

Adecuación y Completitud

$\Gamma \vdash \varphi$ si y solo si $\Gamma \models \varphi$.

En vez de secuentes, usamos conjuntos (para simplificar).
Sean X, Y conjuntos de conceptos.

- $\bigsqcap \emptyset = \top$
- $\bigsqcup \emptyset = \bot$
- $\bigsqcap X = C_1 \sqcap C_2 \ldots \sqcap C_n$ si $X = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$
- $\bigsqcup X = C_1 \sqcup C_2 \ldots \sqcup C_n$ si $X = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$

Juicio $X \Rightarrow Y$

Significa $\bigsqcap X \sqsubseteq \bigsqcup Y$.

Notación.

- X, C es $X \cup \{C\}$
- X, Y es $X \cup Y$

Cálculo de Secuentes para $\mathcal{ALC}$

$X \Rightarrow Y$ (o $\vdash X \Rightarrow Y$) se define por inducción por medio de las siguientes reglas:

$$\textbf{(hyp)} \quad X, C \Rightarrow Y, C$$

$$\textbf{(andL)} \quad \frac{X, C, D \Rightarrow Y}{X, C \sqcap D \Rightarrow Y} \qquad \textbf{(andR)} \quad \frac{X \Rightarrow Y, C \quad X \Rightarrow Y, D}{X \Rightarrow Y, C \sqcap D}$$

$$\textbf{(orL)} \quad \frac{X, C \Rightarrow Y \quad X, D \Rightarrow Y}{X, C \sqcup D \Rightarrow Y} \qquad \textbf{(orR)} \quad \frac{X \Rightarrow Y, C, D}{X \Rightarrow Y, C \sqcup D}$$

$$\textbf{(negL)} \quad \frac{X, C \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y, \neg C} \qquad \textbf{(negR)} \quad \frac{X \Rightarrow Y, C}{X, \neg C \Rightarrow Y}$$

Cálculo de Secuentes para $\mathcal{ALC}$

$X \Rightarrow Y$ (o $\vdash X \Rightarrow Y$) se define por inducción por medio de las siguientes reglas:

$$\textbf{(hyp)} \quad X, C \Rightarrow Y, C$$

$$\textbf{(andL)} \quad \frac{X, C, D \Rightarrow Y}{X, C \sqcap D \Rightarrow Y} \qquad \textbf{(andR)} \quad \frac{X \Rightarrow Y, C \quad X \Rightarrow Y, D}{X \Rightarrow Y, C \sqcap D}$$

$$\textbf{(orL)} \quad \frac{X, C \Rightarrow Y \quad X, D \Rightarrow Y}{X, C \sqcup D \Rightarrow Y} \qquad \textbf{(orR)} \quad \frac{X \Rightarrow Y, C, D}{X \Rightarrow Y, C \sqcup D}$$

$$\textbf{(negL)} \quad \frac{X, C \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y, \neg C} \qquad \textbf{(negR)} \quad \frac{X \Rightarrow Y, C}{X, \neg C \Rightarrow Y}$$

$$\textbf{(forall)} \quad \frac{X^{(-\forall R)} \Rightarrow Y^{(-\exists R)}, C}{X \Rightarrow Y, \forall R.C} \qquad \textbf{(exists)} \quad \frac{X^{(-\forall R)}, C \Rightarrow Y^{(-\exists R)}}{X, \exists R.C \Rightarrow Y}$$

$$X^{(-\forall R)} = \{C \mid \forall R.C \in X\} \qquad X^{(-\exists R)} = \{C \mid \exists R.C \in X\}$$

Ejemplos de derivaciones

1. $\forall R.C \sqcap D \Leftrightarrow \forall R.C \sqcap \forall R.D$.
2. $\exists R.(C \sqcup D) \Leftrightarrow \exists R.C \sqcup \exists R.D$.

Notación. $X \Leftrightarrow Y$ iff $X \Rightarrow Y$ and $Y \Rightarrow X$.

Thinning

$$\frac{X \subseteq X' \quad X \Rightarrow Y \quad Y \subseteq Y'}{X' \Rightarrow Y'}$$

Se demuestra por inducción en la derivación de $X \Rightarrow Y$.

Cut

$$\frac{X \Rightarrow Y, C \quad X', C \Rightarrow Y'}{X, X' \Rightarrow Y, Y'}$$

Sean X, Y conjuntos de conceptos.

Adecuación y Completitud

$\vdash X \Rightarrow Y$ si y solo si $\models X \Rightarrow Y$

Bibliografía para esta clase

Relación entre Lógica de Descripciones y Lógica Modal.

- Capítulo 4 *Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications.* Editores Franz Baader and Diego Calvanese and Deborah L. McGuinness and Daniele Nardi and Peter F. Patel-Schneider. 2003. y .

Lógica Modal.

1. Melvin Fitting. Modal Proof Theory. In Handbook of Modal Logic. Elsevier 2007, .
2. Melvin Fitting. Basic Modal Logic. In Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming Volume 1: Logic Foundations. .
3. Konyndyk, Kenneth. Introductory modal logic. .
4. Patrick Blackburn, Maarten de Rijke e Yde Venema. Modal Logic. Cambridge tracts of Theoretical Computer Science. 2001.

Bibliografía para esta clase

Teoría de la prueba para ALC.

1. Alexander Borgida, Enrico Franconi, Ian Horrocks: Explaining ALC Subsumption. ECAI 2000: 209-213.
2. Martin Hofmann: Proof-Theoretic Approach to Description-Logic. LICS 2005: 229-237
3. Alexandre Rademaker. A Proof Theory for Description Logics. PhD thesis. PUC-Rio, 2010.

Lógica básica.

1. E. Mendelson. Introduction to Mathematical Logic. Chapman & Hall.
2. Goubault-Larrecq, Jean. Proof theory and automated deduction / 1997.
3. A. S. Troelstra y H. Shwistenberg. Basic Proof Theory. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 1996.