Lógica de Descripciones $\mathcal{EL}$

Paula Severi

University of Leicester

Facultad de Ingeniería. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. Noviembre-Diciembre 2018.

Resumen de esta clase

1. Definición de sintaxis y semántica de la lógica $\mathcal{EL}$
2. Algoritmo de clasificación para $\mathcal{EL}$.

- Nombres. Suponemos $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ dos conjuntos infinitos numerables disjuntos.

nombres de conceptos	nombres de roles
$A, B \in \mathbf{C}$	$R, S \in \mathbf{R}$

- Nombres. Suponemos **C**, **R** dos conjuntos infinitos numerables disjuntos.

nombres de conceptos	nombres de roles
$A, B \in \mathbf{C}$	$R, S \in \mathbf{R}$

Conceptos

Se denotan C, D y se definen inductivamente por medio de la gramática siguiente:

$$C, D := \top \mid A \mid C \sqcap D \mid \exists R.C$$

donde $A \in \mathbf{C}$ y $R \in \mathbf{R}$.

1. lenguaje es mas restrictivo que $\mathcal{ALC}$:
   1. no tiene $\perp$
   2. no tiene negación
   3. no tiene $\forall$ restricción de valor
2. Satisfactibilidad: trivial.
   Todos los conceptos son satisfactibles
3. Ventaja de $\mathcal{EL}$. Algoritmo para chequear la inclusión de conceptos:
   - tiene complejidad polinomial.
   - no necesita backtracking
   - acumula las consecuencias semánticas

Inclusión restringida a nombres de conceptos

Lema

Sea $\mathcal{T}$ una Tbox de conceptos en $\mathcal{EL}$, A, B nombres que no ocurren ni en $\mathcal{T}$ ni en C ni en D.
$\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ si y solo si $\mathcal{T} \cup \{A \sqsubseteq C, D \sqsubseteq B \models A \sqsubseteq B$

Normalización de Tboxes

Una Tbox en $\mathcal{EL}$ está en formal normal si contiene solamente inclusiones de la forma:

- $A \sqsubseteq B$
- $A_1 \sqcap A_2 \sqsubseteq B$
- $A \sqsubseteq \exists R.B$ o
- $\exists R.A \sqsubseteq B$

Normalización

Una Tbox $\mathcal{T}$ en $\mathcal{EL}$ se puede transformar a una $\mathcal{T}'$ en formal normal en tiempo lineal en el tamaño de $\mathcal{T}$. Ademas el tamaño de $\mathcal{T}'$ es lineal con respecto al tamaño de $\mathcal{T}$.

Para demostrar esto se aplican ciertas reglas de normalización.

Reglas para normalizar una Tbox en $\mathcal{EL}$

NF1	$\hat{D} \sqsubseteq \hat{C}$	$\longrightarrow$	$\hat{D} \sqsubseteq A, A \sqsubseteq \hat{C}$
NF2	$C \sqcap \hat{D} \sqsubseteq B$	$\longrightarrow$	$\hat{D} \sqsubseteq A, C \sqcap A \sqsubseteq B$
NF3	$\hat{D} \sqcap C \sqsubseteq B$	$\longrightarrow$	$\hat{D} \sqsubseteq A, A \sqcap C \sqsubseteq B$
NF4	$\exists R.\hat{D} \sqsubseteq B$	$\longrightarrow$	$\hat{D} \sqsubseteq A, \exists R.A \sqsubseteq B$
NF5	$B \sqsubseteq \exists R.\hat{D}$	$\longrightarrow$	$\hat{D} \sqsubseteq A, B \sqsubseteq \exists R.A$
NF6	$B \sqsubseteq C \sqcap D$	$\longrightarrow$	$B \sqsubseteq C, B \sqsubseteq D$

$\hat{C}, \hat{D}$ conceptos que no son ni nombres ni $\top$
A es un nombre nuevo
C, D, E son conceptos arbitrarios de $\mathcal{EL}$
B es un nombre de concepto

Ejemplo

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 = \{\exists R.A \sqcap \exists R.\exists S.A \sqsubseteq A \sqcap B\}$$

Normalización de Tboxes de $\mathcal{EL}$

$\mathcal{T}$ Tbox en $\mathcal{EL}$

$\mathcal{T}'$ Tbox normal se obtuvo de $\mathcal{T}$ al aplicar las reglas de normalización

Equivalencia entre Tbox original y la normalizada

$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ si y solo si $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$ para todo A, B en $sig(\mathcal{T})$.

Reglas para la Clasificación en $\mathcal{EL}$

$$\text{CR1}\ \frac{}{A \sqsubseteq A} \qquad \text{CR2}\ \frac{}{A \sqsubseteq \top}$$

$$\text{CR3}\ \frac{A_1 \sqsubseteq A_2 \quad A_2 \sqsubseteq A_3}{A_1 \sqsubseteq A_3} \qquad \text{CR4}\ \frac{A \sqsubseteq A_1 \quad A \sqsubseteq A_2 \quad A_1 \sqcap A_2 \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B}$$

$$\text{CR5}\ \frac{A \sqsubseteq \exists R.A_1 \quad A_1 \sqsubseteq B_1 \quad \exists R.B_1 \sqsubseteq B}{A \sqsubseteq B}$$

Algoritmo de Clasificación

1. Se empieza con la Tbox $\mathcal{T}$ normalizada
2. Extendemos $\mathcal{T}$ y agregamos inclusiones segun las reglas de clasificación
3. Obtenemos una Tbox que la denotamos $\mathcal{T}^*$ (la saturación de $\mathcal{T}$). que se puede calcular en tiempo polinomial

Correctitud del algoritmo de clasificación

$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ si y solo si $\mathcal{T}^* \models A \sqsubseteq B$

Ejemplos

$$\mathcal{T}_1 = \{A \sqsubseteq \exists R.A, \exists R.B \sqsubseteq B_1, \top \sqsubseteq B, A \sqsubseteq B_2, B_1 \sqcap B_2 \sqsubseteq C\}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{A \sqsubseteq \exists R.A, \exists R.A \sqsubseteq B\}$$