Extensión Conservativa

Paula Severi

University of Leicester

Curso Julio 2018. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

Extensión de una ontología

- Queremos *extender una ontología* $\mathcal{T}_1$ con axiomas nuevos que describe una parte de la terminología que no se ha descrito en $\mathcal{T}_1$.
- La extensión $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no debe deducir inclusiones nuevas entre conceptos que estan formulados en la signatura de la ontología vieja $\mathcal{T}_1$.

Signaturas

La signatura $\mathtt{sig}(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ es el conjunto de nombres de conceptos y roles que ocurren en $\mathcal{T}$.

Sea $S \subseteq \mathsf{N_C} \cup \mathsf{N_R}$.

$\mathcal{ALC}(S)$ es el conjunto de conceptos de $\mathcal{ALC}$ que usa únicamente nombres de conceptos y roles de S.

O sea, $C, D \in \mathcal{ALC}(S)$ si

$$C, D := \bot \mid \top \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \forall R.C \mid \exists R.C$$

donde $A \in \mathsf{N_C} \cap S$ y $R \in \mathsf{N_R} \cap S$.

Extensión Conservativa (deductiva) para $\mathcal{ALC}$

Extensión Conservativa (deductiva) para $\mathcal{ALC}$

Sea $S \subseteq \mathtt{sig}(\mathcal{T}_1)$

- $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa (deductiva) de $\mathcal{T}_1$ con respecto a S si para todo $C_1, C_2 \in \mathcal{ALC}(S)$, tenemos que $\mathcal{T}_1 \models C_1 \sqsubseteq C_2$ si y solo si $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \models C_1 \sqsubseteq C_2$.
- $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa de $\mathcal{T}_1$ si $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa (deductiva) de $\mathcal{T}_1$ con respecto a $\mathtt{sig}(\mathcal{T}_1)$.

Observación

Esto siempre lo tenemos:

Propiedad

$\mathcal{T}_1 \models C_1 \sqsubseteq C_2$ implica $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \models C_1 \sqsubseteq C_2$.

Lo que no siempre se cumple es el recíproco.

Ejemplo

$\mathcal{T}_1$
$\mathtt{dama} \sqsubseteq \mathtt{mujer}$

$\mathcal{T}_2$
$\mathtt{mujer} \sqsubseteq \mathtt{doncella}$
$\mathtt{doncella} \sqsubseteq \mathtt{dama}$

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no es una extensión conservativa de $\mathcal{T}_1$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_1 & \not\models & \mathtt{mujer} \sqsubseteq \mathtt{dama} \\ \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 & \models & \mathtt{mujer} \sqsubseteq \mathtt{dama} \end{array}$$

Ejemplo

$\mathcal{T}_1$

$$\begin{array}{lcl} \texttt{miservicioweb} & \sqsubseteq & \texttt{servicioweb} \sqcap \\ & & \exists \texttt{entrada}.\texttt{entero} \sqcap \exists \texttt{entrada}.\texttt{array} \\ \texttt{entero} & \sqsubseteq & \neg \texttt{array} \end{array}$$

$\mathcal{T}_2$

$$\begin{array}{lcl} \texttt{miservicioweb} & \sqsubseteq & \exists \texttt{entrada}.\texttt{idusuario} \\ \texttt{idusuario} & \sqsubseteq & \neg \texttt{array} \\ \texttt{idusuario} & \sqsubseteq & \neg \texttt{entero} \end{array}$$

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no es una extensión conservativa de $\mathcal{T}_1$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_1 & \not\models & \texttt{miservicioweb} \sqsubseteq \exists \texttt{entrada}.(\neg \texttt{entero} \sqcap \neg \texttt{array}) \\ \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 & \models & \texttt{miservicioweb} \sqsubseteq \exists \texttt{entrada}.(\neg \texttt{entero} \sqcap \neg \texttt{array}) \end{array}$$

Extensión conservativa por modelos

Interpretaciones que coinciden en conjunto S de nombres

Sea $S \subseteq \mathsf{N_C} \cup \mathsf{N_R}$. Decimos que las interpretaciones $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ coinciden en los símbolos de S si se cumple lo siguiente:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}'}$.
- $A^{\mathcal{I}} = A^{\mathcal{I}'}$ para todo $A \in S$
- $R^{\mathcal{I}} = R^{\mathcal{I}'}$ para todo $R \in S$

Extensión Conservativa por Modelos

Sean $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ dos Tboxes. Decimos que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa por modelos de $\mathcal{T}_1$ sii para todo modelo $\mathcal{I}$ de $\mathcal{T}_1$, existe un modelo $\widehat{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ tal que $\mathcal{I}$ e $\widehat{\mathcal{I}}$ coinciden en $\mathsf{sig}(\mathcal{T}_1)$.

Ejemplo

$\mathcal{T}_1$

$$\texttt{servicioweb} \;=\; \exists\texttt{entrada}.\top$$

$\mathcal{T}_2$

$$\begin{array}{lcl} \texttt{miservicioweb} & \sqsubseteq & \texttt{servicioweb} \\ \texttt{miservicioweb} & \sqsubseteq & \exists\texttt{entrada}.\texttt{entero} \sqcap \exists\texttt{entrada}.\texttt{array} \\ \texttt{entero} & \sqsubseteq & \neg\texttt{array} \end{array}$$

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa por modelos de $\mathcal{T}_1$.
$\mathsf{sig}(\mathcal{T}_1) = \{\texttt{servicioweb}, \texttt{entrada}\}$. Sea $\mathcal{I}$ un modelo de $\mathcal{T}_1$.
Definimos $\widehat{\mathcal{I}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl} \texttt{servicioweb}^{\widehat{\mathcal{I}}} & = & \texttt{servicioweb}^{\mathcal{I}} \\ \texttt{entrada}^{\widehat{\mathcal{I}}} & = & \texttt{entrada}^{\mathcal{I}} \\ \texttt{miservicioweb}^{\widehat{\mathcal{I}}} & = & \texttt{entero}^{\widehat{\mathcal{I}}} = \texttt{array}^{\widehat{\mathcal{I}}} = \emptyset \end{array}$$

Comparación de las dos nociones de Extensión conservativa

Extensión conservativa deductiva es la que definimos primero y se basa en $\models$.

Propiedad

Si $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa por modelos de $\mathcal{T}_1$ entonces $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa deductiva de $\mathcal{T}_1$.

Demostración

Necesitamos usar el Ejercicio 2 del Práctico 5.

El recíproco no se cumple.

Ejemplo

$$\mathcal{T}_1 = \{\exists R.\top \sqcap \exists S.\top = \top\} \qquad \mathcal{T}_2 = \{\exists R.A \sqcap \exists S.\neg A = \top\}$$

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa deductiva de $\mathcal{T}_1$ pero no es una extensión conservativa por modelos.

El modelo de $\mathcal{T}_1$ definido por

$$\Delta^{\mathcal{I}} = \{0\} \qquad R^{\mathcal{I}} = S^{\mathcal{I}} = \{(0,0)\}$$

no se puede extender a un modelo de $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ sin cambiar las interpretaciones de R y S.

Concepto Testigo

C es satisfactible relativo a $\mathcal{T}$ si existe un modelo $\mathcal{I}$ de $\mathcal{T}$ tal que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$.

- $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ si y solo si $C \sqcap \neg D$ es insatisfactible relativo a $\mathcal{T}$.
- C es insatisfactible relativo a $\mathcal{T}$ si y solo si $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq \bot$.

Propiedad

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa de $\mathcal{T}_1$ con respecto a S si y solo si para todo concepto $C \in \mathcal{ALC}(S)$ que es satisfactible relativo a $\mathcal{T}_1$ es satisfactible relativo a $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

Concepto Testigo

C es un concepto testigo si $C \in \mathcal{ALC}(S)$ es satisfactible relativo a $\mathcal{T}_1$ pero NO es satisfactible relativo a $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

Ejemplo

$\mathcal{T}_1$

$$\begin{array}{lcl}\mathtt{miservicioweb} & \sqsubseteq & \mathtt{servicioweb} \sqcap \\ & & \exists \mathtt{entrada}.\mathtt{entero} \sqcap \exists \mathtt{salidad}.\mathtt{array} \\ \mathtt{entero} & \sqsubseteq & \neg \mathtt{array}\end{array}$$

$\mathcal{T}_2$

$$\begin{array}{lcl}\mathtt{miservicioweb} & \sqsubseteq & \exists \mathtt{entrada}.\mathtt{idusuario} \\ \mathtt{idusuario} & \sqsubseteq & \neg \mathtt{array} \\ \mathtt{idusuario} & \sqsubseteq & \neg \mathtt{entero}\end{array}$$

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no es una extensión conservativa de $\mathcal{T}_1$.

Concepto testigo es

$$\mathtt{miservicioweb} \sqcap \forall \mathtt{entrada}.(\mathtt{entero} \sqcup \mathtt{array})$$

Ejemplo

$\mathcal{T}_1$

$\texttt{dama} \sqsubseteq \texttt{mujer}$

$\mathcal{T}_2$

$\texttt{mujer} \sqsubseteq \texttt{doncella}$

$\texttt{doncella} \sqsubseteq \texttt{dama}$

$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no es una extensión conservativa de $\mathcal{T}_1$.

El concepto testigo es $\texttt{mujer} \sqcap \neg\texttt{dama}$.

Decidibilidad de Conservatividad

Problema de conservatividad

El problema de decidir si $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una extensión conservativa de $\mathcal{T}_1$ o no.

Decidibilidad

El problema de conservatividad en $\mathcal{ALC}$ (y $\mathcal{ALCQI}$) es decidible.

Idea de la Demostración

Construímos el concepto testigo.

Indecidibilidad de Conservatividad en $\mathcal{ALCQIO}$

$\mathcal{ALCQIO} = \mathcal{ALC}+$ restricciones de cardinalidad, roles inversos, nominales

Indecidibilidad de conservatividad

El problema de conservatividad en $\mathcal{ALCQIO}$ es indecidible.

Se demuestra con una variante del embaldosado.

Bibliografía

- Ghilardi, Lutz, Wolter. Did I damage my ontology? KR 2006.
- Lutz, Walther, Wolter. Conservative extensions in expressive description logics. IJCAI 2007.