Indecidibilidad de una extensión de $\mathcal{ALC}$ con restricciones de cardinalidad y roles complejos

Paula Severi

University of Leicester

Curso Noviembre-Diciembre 2018. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

Resumen

1. Problema de la Parada.
2. Problema del Embaldosado. Indecidibilidad.
3. Definimos $\mathcal{ALC}^+$, una extensión de $\mathcal{ALC}$ con restricciones de cardinalidad y roles compuestos.
4. Reducción del problema del embaldosado al problema de consistencia en $\mathcal{ALC}^+$.
5. Indecidibilidad de la consistencia en $\mathcal{ALC}^+$.

Problema de la parada

Dado un programa y un dato de entrada, determinar si el programa termina con este dato de entrada o no.

Intento de Solución. Correr el programa con el dato de entrada. Si el programa para, sabemos que para. Si el programa no para en un cierto tiempo determinado, concluir que no termina.

¡ Esto no sirve! Tal vez no esperamos lo suficiente.

Indecidibilidad del Problema de la Parada

Teorema

El problema de la parada es indecidible.

Se prueba por absurdo, argumento análogo al de diagonalización de Cantor.

Nota aparte

Cuando codificamos un algoritmo, se expresa como un string que también puede interpretarse como un número natural.

Podemos manipular programas como si fueran datos.

Ejemplo:

- compiladores (dado un programa genera código de máquina),
- Scheme (programas son funciones y tenemos funciones de alto orden),
- Cálculo Lambda.

Idea de la Demostración (Alan Turing, 1936)

Supongamos que existe una solución al problema de la parada. Sea H el programa que lo resuelve.
Dado un par (P, E) donde

- P es un programa
- E es una dato de entrada para P

H para y devuelve el valor "*PARA*"si P para con el dato E
H para y devuelve el valor "*NO PARA*"en otro caso.

Nuevo Algoritmo K con entrada P

Si H con entrada (P, P) devuelve "*NO PARA*"entonces K para.
Si H con entrada (P, P) devuelve "*PARA*"entonces K entra en loop.

Como K es un programa, tomamos como entrada para K el mismo K.
Si H dice que K para entonces K entra en loop.
Si H dice que K no para entonces K para.
¡ABSURDO!

Preguntas hechas por Hilbert 1928

- ¿ La matemática es consistente?
- ¿ La matemática es completa?
- ¿ La matemática es decidible?

Entscheidungsproblem (Problema de Decisión)

Entscheidungsproblem

Dada una fórmula en lógica de primer orden, determinar si la fórmula es universalmente válida o no.

Problema equivalente: Dada una fórmula en lógica de primer orden, determinar si la fórmula se puede deducir de los axiomas o no.

Entscheidungsproblem (Problema de Decisión)

Entscheidungsproblem

Dada una fórmula en lógica de primer orden, determinar si la fórmula es universalmente válida o no.

Problema equivalente: Dada una fórmula en lógica de primer orden, determinar si la fórmula se puede deducir de los axiomas o no.

Teorema (Alonzo Church, 1936. Alan Turing 1937)

El problema de saber si una fórmula de la lógica de primer orden se deduce de los axiomas o no es indecidible.

Idea de la demostración: se reduce el problema de la parada al Entscheidungsproblem.

Recubrimiento de un piso infinito con baldosas

El problema de encontrar una forma de embaldosar un piso infinito (o resolver un rompecabezas), no tiene solución algorítmica.

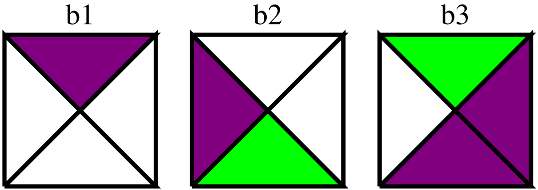
Indecidibilidad del problema del embaldosado

El problema de, dado un sistema de baldosas, determinar si existe un embaldosado, es indecidible.

Idea de la demostración: se reduce el problema de la parada al problema del embaldosado.

Recubrimiento de un piso con baldosas

¿ Se puede cubir un área de $n \times n$ con las siguientes baldosas?

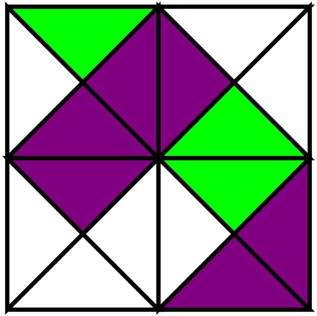


Reglas

1. Solamente estas 3 baldosas se pueden usar, pero se pueden usar un número arbitrario de veces.
2. Los colores en los bordes tienen que coincidir.
3. Las baldosas no se pueden rotar.

Recubrimiento de un piso con baldosas

Se puede recubrir un suelo de 2×2 con estas baldosas.



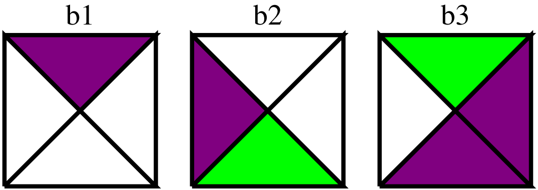
Recubrimiento de un piso con baldosas

Sistema de baldosas

Un sistema de baldosas es una tupla $\mathcal{B} = (B, b, H, V)$ donde B es un conjunto finito, $b \in B$, y $H, V \subseteq B \times B$.

- H dice qué baldosas pueden ponerse a la derecha de otras
- V dice qué baldosas pueden ponerse arriba de otras.

Ejemplo de un sistema de baldosas



$$
\begin{aligned}
B &= \{b_1, b_2, b_3\} \\
V &= \{(b_1, b_3), (b_2, b_1), (b_3, b_2)\} \\
H &= \{(b_1, b_3), (b_2, b_1), (b_3, b_2)\}
\end{aligned}
$$

Recubrimiento de un piso con baldosas

Embaldosado para un sistema de baldosas $\mathcal{B}$

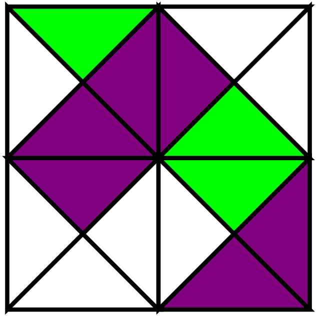
Un embaldosado para $\mathcal{B}$ es una función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow B$, que asigna baldosas a cada celda de una matriz infinita (pero que comienza en una esquina), donde

- $f(0,0) = b$,
- $(f(n,m), f(n+1,m)) \in H$,
- $(f(n,m), f(n,m+1)) \in V$

para todo $m, n \geq 0$.

$\mathcal{B}$ *embaldosa* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si existe un embaldosado para $\mathcal{B}$.

Ejemplo de embaldosado



$$\begin{aligned} f(0,0) &= b_1 \\ f(1,0) &= b_3 \\ f(0,1) &= b_3 \\ f(1,1) &= b_2 \end{aligned}$$

Recubrimiento de un piso infinito con baldosas

El problema de encontrar una forma de embaldosar un piso infinito (o resolver un rompecabezas), no tiene solución algorítmica.

Indecidibilidad del problema del embaldosado

El problema de, dado un sistema de baldosas determinar si existe un embaldosado, es indecidible.

Conceptos y roles

Se denotan C, D y se definen inductivamente por medio de la gramática siguiente:

$$
\begin{aligned}
C, D \quad &:= \bot \mid \top \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \\
&\quad \forall r.C \mid \exists r.C \mid \geq nr.C \mid \leq nr.C
\end{aligned}
$$

$$
r_1, r_2 \quad := R \mid r_1 \circ r_2
$$

donde $A \in \mathsf{N_C}$ y $R \in \mathsf{N_R}$.

Knowledge bases

- $\mathcal{T}$ Tbox set of concept inclusions $C \sqsubseteq D$
- $\mathcal{A}$ Abox set of assertions $a : C \;\; (a, b) : r$
- $\mathcal{R}$ Rbox set of role inclusions $r \sqsubseteq s$

Semántica de $\mathcal{ALC}^+$

Interpretación

Sea $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ tal que

1. $\Delta^{\mathcal{I}}$ es un conjunto no vacío, dominio de la interpretación
2. $\cdot^{\mathcal{I}}$ es una función de interpretación que asigna
   1. a cada nombre A, un conjunto $A^{\mathcal{I}} \subset \Delta^{\mathcal{I}}$ y
   2. cada nombre R una relación binaria $R^{\mathcal{I}} \subset \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$

Semántica de $\mathcal{ALC}^+$

- Extensión de la interpretación a roles compuestos.

$$(r_1 \circ r_2)^{\mathcal{I}} \quad = \{(x,z) \mid (x,y) \in r_1{}^{\mathcal{I}}, (y,z) \in r_2{}^{\mathcal{I}}\}$$

- Extensión de la interpretación a conceptos compuestos.

$$\begin{array}{ll}
\bot^{\mathcal{I}} & = \emptyset \\
\top^{\mathcal{I}} & = \Delta^{\mathcal{I}} \\
(\neg C)^{\mathcal{I}} & = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} & = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} & = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}} \\
(\forall r.C)^{\mathcal{I}} & = \{x \mid \forall y.(x,y) \in r^{\mathcal{I}} \rightarrow \; y \in C^{\mathcal{I}}\} \\
(\exists r.C)^{\mathcal{I}} & = \{x \mid \exists y.(x,y) \in r^{\mathcal{I}} \wedge \; y \in C^{\mathcal{I}}\} \\
(\geq n\, R.C)^{\mathcal{I}} & = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \mathsf{card}(\mathsf{imagen}(x,C)) \geq n\} \\
(\leq n\, R.C)^{\mathcal{I}} & = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \mathsf{card}(\mathsf{imagen}(x,C)) \leq n\}
\end{array}$$

Notación:

$\mathsf{card}(X)$ es la cardinalidad de conjunto X

$\mathsf{imagen}(x,C) = \{y \in C^{\mathcal{I}} \mid (x,y) \in R^{\mathcal{I}}\}$

Modelo de una base de conocimiento

Sea $\mathcal{I}$ una intepretación y $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ una base de conocimiendo.

$\mathcal{I}$ es un modelo de $\mathcal{K}$ (o $\mathcal{I}$ satisface $\mathcal{K}$)

1. $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ para todo $C \sqsubseteq D$ en $\mathcal{T}$.
2. $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ para todo $a : C$ en $\mathcal{A}$
3. $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$ si $\langle a, b \rangle : R$ en $\mathcal{A}$.
4. $r^{\mathcal{I}} \subseteq s^{\mathcal{I}}$ para todo $r \sqsubseteq s$ en $\mathcal{R}$.

Notación: $\mathcal{I} \models \mathcal{K}$.

Consistencia de una base de conocimiento

$\mathcal{K}$ es consistente si existe $\mathcal{I}$ modelo de $\mathcal{K}$.

Indecidibilidad de la consistencia en $\mathcal{ALC}^+$

El problema de, dado una base de conocimiento en $\mathcal{ALC}^+$ determinar si es consistente o no, es indecidible.

Idea de la demostración: se reduce el problema del embaldosado al problema de la consistencia.

Reducción del embaldosado a consistencia

Sea $\mathcal{B} = (B, b_0, H, V)$ un sistema de baldosas con $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_k\}$. Vamos a construir una base $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ tal que:

$$\mathcal{B} \text{ embaldosa } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ si y solo si } \mathcal{K}_{\mathcal{B}} \text{ es consistente.}$$

Necesitamos introducir los siguientes nombres:

- nombres $\mathsf{b0}, \mathsf{b1}, \ldots \mathsf{bk}$ de conceptos, uno por cada baldosa en B.
- nombres de roles $\mathsf{derecha}$, arriba para moverse a la derecha y arriba.

Reducción del embaldosado a la consistencia

Se define $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ con los siguientes axiomas:

1. derecha y arriba son funciones.
   $\top \sqsubseteq = 1\ \mathsf{derecha}.\top \qquad \top \sqsubseteq = 1\ \mathsf{arriba}.\top$
2. En cualquier lugar del piso, moverse a la derecha y luego hacia arriba es lo mismo que moverse hacia arriba y luego a la derecha.
   $(\mathsf{derecha} \circ \mathsf{arriba}) \sqsubseteq (\mathsf{arriba} \circ \mathsf{derecha})$
   $(\mathsf{arriba} \circ \mathsf{derecha}) \sqsubseteq (\mathsf{derecha} \circ \mathsf{arriba})$
3. Exactamente una baldosa se pone en cada lugar.
   $$\top \sqsubseteq \bigsqcup_{i=0}^{k} (\mathsf{bi} \sqcap \bigsqcap_{0 \leq j \leq k, i \neq j} \neg \mathsf{bj})$$
4. Los colores coinciden horizontal y verticalmente:
   $$\top \sqsubseteq \bigsqcap_{i=0}^{k} (\mathsf{bi} \Rightarrow (\forall \mathsf{derecha}. \bigsqcup_{(b_i,b_j) \in H} \mathsf{bj}) \sqcap (\forall \mathsf{arriba}. \bigsqcup_{(b_i,b_j) \in V} \mathsf{bj}))$$
5. Existe un origen: $\mathsf{b0}(x_0)$.

Directo

$\mathcal{B}$ embaldosa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ es consistente.

Suponemos $\mathcal{B}$ embaldosa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Construimos un modelo de $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ como sigue:

$$
\begin{array}{lcl}
\Delta^{\mathcal{I}} & = & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\
\mathsf{derecha}^{\mathcal{I}} & = & \{((n,m),(n+1,m)) \mid n,m \in \mathbb{N}\} \\
\mathsf{arriba}^{\mathcal{I}} & = & \{((n,m),(n,m+1)) \mid n,m \in \mathbb{N}\} \\
\mathsf{b}i^{\mathcal{I}} & = & \{(n,m) \mid f(n,m) = b_i\}
\end{array}
$$

Reducción del problema del embaldosado al de consistencia

Recíproco

Si $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ es consistente entonces $\mathcal{B}$ embaldosa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Suponemos que $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}$ tiene un modelo. Usando los dos primeros axiomas, vemos que existe una función $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \Delta^{\mathcal{I}}$ tal que $p(0,0) = {x_0}^{\mathcal{I}}$ y

$$
\begin{array}{rcl}
(p(n,m), p(n+1,m)) & \in & \mathsf{derecha}^{\mathcal{I}} \\
(p(n,m), p(n,m+1)) & \in & \mathsf{arriba}^{\mathcal{I}}
\end{array}
$$

Se define la función de embaldosado

$$f(n,m) = b_i \text{ sii } p(n,m) \in \mathsf{bi}^{\mathcal{I}}$$

f es total y está bien definida por el tercer axioma.
Sea $b_i = f(n,m)$ y $b_j = f(n+1,m)$. Entonces, $p(n,m) \in \mathsf{bi}^{\mathcal{I}}$, $p(n+1,m) \in \mathsf{bj}^{\mathcal{I}}$, $(p(n,m), p(n+1,m)) \in \mathsf{derecha}^{\mathcal{I}}$. Usando el cuarto axioma, tenemos que $(b_i, b_j) \in H$.

Bibliografía para esta clase

- Franz Baader, Ulrike Sattler. Expressive Number Restrictions in Description Logics. J. Log. Comput. 9(3): 319-350 (1999).
- Ian Horrocks, Ulrike Sattler, Stephan Tobies. Practical Reasoning for Expressive Description Logics Logic Journal of the IGPL 8(3): 239-263 (2000).
- Ian Horrocks, Ulrike Sattler. Decidability of $\mathcal{SHIQ}$ with complex rol inclusion axioms.Artif. Intell. 160(1-2): 79-104 (2004)
- Denise Gorse. Lecture 4. Algorithmics Limits of Computation.
- Gonzalo Navarro. Apuntes de Teoría de la Computación. Depto de Computación de la Universidad de Chile, 2011.