Teoría de Modelos en la Lógica de Descripciones $\mathcal{ALC}$

Paula Severi

University of Leicester

Facultad de Ingeniería. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. Noviembre-Diciembre 2018.

Resumen de esta clase

1. Bisimulaciones
2. Poder expressivo de $\mathcal{ALC}$
3. Propiedad de la finitud del modelo para $\mathcal{ALC}$
4. Una lógica de descripciones que no satisface la propiedad de la finitud del modelo

Bisimulaciones en $\mathcal{ALC}$

$\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ es una simulación entre $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$ si $d_1 \, \rho \, d_2$ implica

1. si $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$ entonces $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$
   para todo A
2. si $(d_1, d_1') \in R^{\mathcal{I}_1}$ entonces existe $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$
   $d_1' \, \rho \, d_2' \qquad (d_2, d_2') \in R^{\mathcal{I}_2}$
   para todo R y para todo $d_1' \in \Delta_1$

para todo $d_1 \in \Delta^{\mathcal{I}_1}$, $d_2 \in \Delta_{\mathcal{I}_2}$.

ρ es una bisimulación si ρ y ρ^{-1} son simulaciones

$(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ si hay una bisimulación entre $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$ tal que $d_1 \, \rho \, d_2$.

Ejemplos

$(d_1, \mathcal{I}_1)$ y $(e_1, \mathcal{I}_2)$ no son bisimilares.

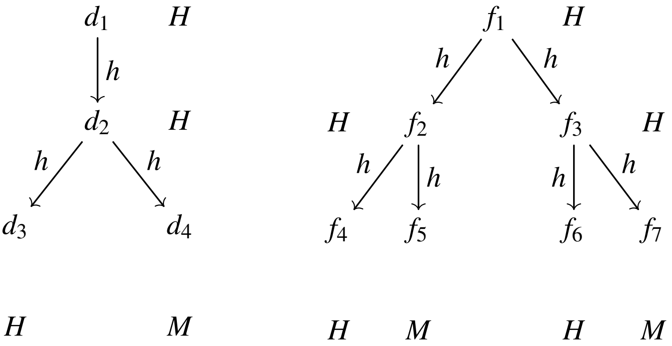
$$\begin{tikzcd}
 & d_1 \arrow[d, "h"] & H \\
 & d_2 \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h"] & H \\
d_3 & & d_4 \\
H & & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & e_1 \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h"] & H & \\
H & e_2 \arrow[d, "h"'] & & e_3 \arrow[d, "h"] & H \\
 & e_4 & & e_5 & \\
 & H & & M &
\end{tikzcd}$$

$C = \exists h.(H \sqcap \exists h.H \sqcap \exists h.M)$

$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \qquad e_1 \notin C^{\mathcal{I}_2}$

Ejemplos

$(d_1, \mathcal{I}_1)$ y $(f_1, \mathcal{I}_3)$ son bisimilares.



$C = \exists h.(H \sqcap \exists h.H \sqcap \exists h.M)$

$d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad f_1 \in C^{\mathcal{I}_3}$

Teorema

Si $(\mathcal{I}_1, d_1) \sim (\mathcal{I}_2, d_2)$ entonces $d_1 \in C^{\mathcal{I}_1}$ si y solo si $d_2 \in C^{\mathcal{I}_2}$

Demostración.

Inducción en C.

Poder Expresivo

Teorema

$\mathcal{ALCQ}$ es mas expresiva que $\mathcal{ALC}$

Demostración

En $\mathcal{ALC}$ no se puede expresar el concepto $\leqslant 1h.\top$. Supongamos que existe C en $\mathcal{ALC}$ equivalente a $\leqslant 1h.\top$.

$$\begin{tikzcd} d_1 \arrow[d, "h"] & & & e_1 \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h"] & \\ d_2 & & e_2 & & e_3 \end{tikzcd}$$

$(d_1, \mathcal{I}_1)$ y $(e_1, \mathcal{I}_2)$ son bisimilares pero $d_1 \in C^{\mathcal{I}_1} \quad e_1 \notin C^{\mathcal{I}_2}$

Teorema

$\mathcal{ALC}$ tiene la propiedad de finitud del modelo, i.e. si $\mathcal{K}$ tiene un modelo entonces tiene un modelo de cardinalidad finita.

Esto es consecuencia del algoritmo de tableaux que vamos a ver mas adelante.

Teorema

$\mathcal{ALCQI}$ no tiene la propiedad de finitud del modelo

Demostración

$$A \sqsubseteq \exists R.A \quad \top \sqsubseteq \leqslant 1 R^{-} \quad a : \neg A \sqcap \exists R.A$$

no tiene un modelo finito.