Curso Lógica de Descripciones 2018
InCo, Facultad de Ingeniería, Montevideo, Uruguay

EJERCICIOS SOBRE SINTAXIS Y SEMÁNTICA DE $\mathcal{ALC}$

Ejercicio 1 (Sintaxis).

1. Escribir una base de conocimiento en $\mathcal{ALC}$ con la siguiente información.

    - Laura está casada con Walter y Walter está casado con Laura.
    - Una mujer puede casarse únicamente con un hombre y un hombre puede casarse únicamente con una mujer.
    - Un soltero es un hombre o una mujer que no está casado con nadie.
    - Una persona casada es alguién que no es soltero.

2. Traducir la base de conocimiento de este ejercicio a la lógica de predicados.

Ejercicio 2 (**Propiedades de $\forall$ y $\exists$**). Demostrar las siguientes implicancias usando la definición de semántica de $\models$.

1. $C \sqsubseteq D \models \exists R.C \sqsubseteq \exists R.D$.
2. $C \sqsubseteq D \models \forall R.C \sqsubseteq \forall R.D$.
3. $\models \forall R.(C \sqcap D) = \forall R.C \sqcap \forall R.D$.
4. $\models \exists R.(C \sqcup D) = \exists R.C \sqcup \exists R.D$.
5. $\models \forall R.\top = \top$.
6. $C = \top$ implica $\forall R.C = \top$.

Ejercicio 3. Demostrar lo siguiente dando contraejemplos:

1. $C \sqsubseteq D \not\models C \sqsubseteq \forall R.D$ (a menos que $C = \top$).
2. $\not\models \exists R.C \sqcap \exists R.D \sqsubseteq \exists R.(C \sqcap D)$.
3. $\not\models \forall R.(C \sqcup D) \sqsubseteq \forall R.C \sqcup \forall R.D$.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ la siguiente base de conocimiento.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{\texttt{Retablo} \sqsubseteq \texttt{Pintura} \sqcap \exists \texttt{tieneFigura}.\texttt{FiguraReligiosa}\} \\ \mathcal{A} &= \{\texttt{Madonna Sixtina} : \texttt{Retablo},\ \texttt{Guernica} : \texttt{Pintura}\} \end{aligned}$$

¿ Podemos realizar las siguientes inferencias? En caso positivo, demostrarlo usando la definición de $\models$ y en caso negativo dar un contraejemplo.

- $\mathcal{K} \models \texttt{Madonna Sixtina} : \exists \texttt{tieneFigura}.\texttt{FiguraReligiosa}$
- $\mathcal{K} \models \texttt{Guernica} : \exists \texttt{tieneFigura}.\texttt{FiguraReligiosa}$
- $\mathcal{K} \models \texttt{Guernica} : \neg \exists \texttt{tieneFigura}.\texttt{FiguraReligiosa}$

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ la siguiente base de conocimiento.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \;& \{\texttt{Retablos} \sqsubseteq \texttt{Pintura}\} \\ \mathcal{A} = \;& \{\texttt{Madonna Sixtina} : \texttt{Retablo}, \\ & \texttt{Virgen} : \texttt{FiguraReligiosa}, \\ & (\texttt{Madonna Sixtina}, \texttt{Virgen}) : \texttt{tieneFigura}, \\ & \texttt{Caballo} : \neg\texttt{FiguraReligiosa}, \\ & (\texttt{Guernica}, \texttt{Caballo}) : \texttt{tieneFigura}\} \end{aligned}$$

¿ Podemos realizar las siguientes inferencias? En caso positivo, demostrarlo usando la definición de $\models$ y en caso negativo dar un contraejemplo.

- $\mathcal{K} \models \texttt{Madonna Sixtina} : \exists \texttt{tieneFigura}.\texttt{FiguraReligiosa}$
- $\mathcal{K} \models \texttt{Madonna Sixtina} : \forall \texttt{tieneFigura}.\texttt{FiguraReligiosa}$
- $\mathcal{K} \models \texttt{Guernica} : \neg \forall \texttt{tieneFigura}.\texttt{FiguraReligiosa}$

Ejercicio 6(**Reducción de satisfactibilidad a inclusión**) Probar que las siguientes clausulas son equivalentes:

- $\mathcal{T} \models C = \top$.
- $\neg C$ es insatisfactible relativo a $\mathcal{T}$.

Ejercicio 7 (**Reducción de muchos axioms en una TBox a uno solo**). Definimos

$$\mathsf{Concepto}_{\mathcal{T}} := \bigsqcap_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} \neg C \sqcup D$$

Probar que las siguientes clausulas son equivalentes:

- $\mathcal{I}$ es modelo de $\mathcal{T}$
- $\mathcal{I}$ es modelo de $\mathsf{Concepto}_{\mathcal{T}} = \top$

Ejercicio 8 (**Internalización de la TBox por medio de U**). Definimos

$$\mathsf{Concepto}_{\mathcal{T}} := \bigsqcap_{C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}} \neg C \sqcup D$$

Agregamos un rol especial U cuya interpretación es $U^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$. Suponiendo que $\Delta^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$, probar las siguientes equivalencias:

1. $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$.
2. $\mathsf{Concepto}_{\mathcal{T}} = \top \models C \sqsubseteq D$.
3. $C \sqcap \neg D \sqcap \mathsf{Concepto}_{\mathcal{T}} \sqcap \forall U.\mathsf{Concepto}_{\mathcal{T}}$ es insatisfactible.

Nota. C es insatisfactible si $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$ para todo $\mathcal{I}$.

Ejercicio 9 (**Submodelo e Internalización de la TBox usando un conjunto infinito**). Sea $\mathcal{I}$ una interpretación. Definimos una interpretación $\mathcal{J} = (\Delta^{\mathcal{J}}, \cdot^{\mathcal{J}})$ generada por un subconjunto $S \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ de la siguiente manera:

- $\Delta^{\mathcal{J}} = S$,
- $A^{\mathcal{J}} = A^{\mathcal{I}} \cap S$,
- $R^{\mathcal{J}} = R^{\mathcal{I}} \cap (S \times S)$
- S satisface la siguiente condición de clausura: si $x \in S$, $(x, y) \in R^{\mathcal{I}}$ entonces $y \in S$ para todo $x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}, R \in \mathsf{N_R}$.

1. Probar que $C^{\mathcal{I}} \cap S = C^{\mathcal{J}}$ para todo concepto C si $\mathcal{J}$ es una interpretación generada por S.
2. Suponemos que tenemos un solo concepto de rol, i.e. $\mathsf{N_R} = \{R\}$. Sea X un conjunto (posiblemente infinito) de conceptos.
   Se define $(\bigsqcap X)^{\mathcal{I}} = \bigcap_{C \in X} C^{\mathcal{I}}$.
   Probar la equivalencia entre los siguientes enunciados:
   (a) $C \sqsubseteq D \models E \sqsubseteq F$
   (b) $(\bigsqcap X) \sqcap E \sqsubseteq F$ donde $X = \{(\forall R)^n.(\neg C \sqcup D) \mid n \in \mathbb{N}\}$

   Sugerencia: tomar $S = (\bigsqcap X)^{\mathcal{I}}$.