Curso Lógica de Descripciones 2018
InCo, Facultad de Ingeniería, Montevideo, Uruguay

# EJERCICIOS DE TABLEAUX

**Ejercicio 1 (Dominio de un rol)**. Sea $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \{\mathtt{Retablo} \sqsubseteq \mathtt{Pintura} \sqcap \exists \mathtt{tieneFigura.FiguraReligiosa}, \\
&\quad \exists \mathtt{haPintado}.\top \sqsubseteq \mathtt{Pintor}, \quad \top \sqsubseteq \forall \mathtt{haPintado.Pintura}\} \\
\mathcal{A} &= \{\mathtt{Madonna\ Sixtina} : \mathtt{Retablo}, \quad \mathtt{Rafael} : \neg\mathtt{Pintor}, \\
&\quad < \mathtt{Rafael}, \mathtt{Madona\ Sixtina} >: \mathtt{haPintado}\}
\end{aligned}$$

Demostrar que $\mathcal{K}$ es inconsistente usando el algoritmo de tableaux para $\mathcal{ALC}$.
Nota: el tercer axioma dice que el dominio de $\mathtt{haPintado}$ es $\mathtt{Pinto}$.

**Ejercicio 2 (La tragedia de Edipo)** Sea $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \{\mathtt{Parricida} \sqsubseteq \mathtt{Persona}\} \\
\mathcal{A} &= \{\mathtt{edipo} : \mathtt{Parricida}, \mathtt{tersandro} : \neg\mathtt{Parricida} \\
&\quad (\mathtt{yocasta}, \mathtt{edipo}) : \mathtt{tieneHijo} \\
&\quad (\mathtt{yocasta}, \mathtt{polinicides}) : \mathtt{tieneHijo} \\
&\quad (\mathtt{edipo}, \mathtt{polinicides}) : \mathtt{tieneHijo} \\
&\quad (\mathtt{polinicides}, \mathtt{tersandro}) : \mathtt{tieneHijo}\}
\end{aligned}$$

Demostrar que
$\mathcal{K} \models \mathtt{yocasta} : (\exists \mathtt{tieneHijo}.(\mathtt{Parricida} \sqcap \exists \mathtt{tieneHijo}.\neg\mathtt{Parricida}))$
usando el algoritmo de tableaux para $\mathcal{ALC}$.

**Ejercicio 3 (Bloqueo)**. Sea $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \{\mathtt{Retablo} \sqsubseteq \mathtt{Pintura} \sqcap \exists \mathtt{tieneFigura.FiguraReligiosa}, \\
&\quad \mathtt{RetabloSeccionado} \sqsubseteq \mathtt{Retablo} \\
&\quad \mathtt{FigureReligiosa} \sqsubseteq \exists \mathtt{estaEn.RetabloSeccionado}\} \\
\mathcal{A} &= \{\mathtt{Madonna\ Sixtina} : \mathtt{Retablo} \sqcap \neg\mathtt{RetabloSeccionado}\}
\end{aligned}$$

Demostrar que $\mathcal{K}$ es consistente usando el algoritmo de tableaux para $\mathcal{ALC}$.

**Ejercicio 4 (Inversas)**. Sea $\mathcal{A} = \{A(a), R(a, b), (\exists S.\forall S^-.\forall R^-.\neg A)(b)\}$. Probar que $\mathcal{A}$ es inconsistente usando el algoritmo de Tableaux para $\mathcal{SI}$.

**Ejercicio 5**. Probar que las siguientes bases son inconsistentes usando Tableaux.

1. $A_1 \equiv A_2$, $A_1(p)$,$\neg A_2(p)$.

2. $a_1 \neq a_2$, $P(p, a_1)$, $P(p, a_2)$, $P$ es funcional.

3. $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$, $A_1 \sqcap A_2 \sqsubseteq \bot$, $P(q, a_1)$, $P(q, a_2)$, $P$ es funcional.

4. $A_1(q)$, $A_1 \equiv \exists R.\exists R.A_2$, $A_2 \equiv \forall R.\forall R.\neg A_1$, $A_1 \equiv A_2$.

5. $A_1(p)$, $R(p, q)$, $A_3(q)$, $\exists R.A_3 \sqsubseteq \neg A_1$.

6. $R(p, a_1)$, $R(p, a_2)$, $R(p, a_3)$, $S(a_1, a_2)$, $S(a_2, a_3)$, $\top \sqsubseteq \leq 2R.\top$, $\top \sqsubseteq \leq 1S.\top$, $a_1 = a_2$, $a_2 \neq a_3$.

7. Tenemos dos individuos $p, q$ tal que $p \neq q$ y los siguientes axiomas:

$$A \equiv \neg K \quad A \sqsubseteq H_1 \sqcup H_2 \quad K \sqcup H_1 \sqcup H_2 \sqsubseteq \bot$$

8. Tenemos tres individuos $p, q, r$ tal que $q \neq r$. Además tenemos que:

$$\begin{array}{ll} Abox & R(p,q) \;\; R(p,r) \\ Tbox & A \equiv \neg K \;\; A \sqsubseteq H_1 \sqcup H_2 \\ & K \sqcup H_1 \sqcup H_2 \sqsubseteq \leq 1R.\top \end{array}$$

9. $a_1 = a_2$, $R(c, a_1)$, $R(c, a_2)$, $C(a_1)$, $D(a_2)$, $\top \sqsubseteq \geq 2R.(C \sqcup D)$, $\top \sqsubseteq \leq 1R.C \sqcap \leq 1R.D$.

**Ejercicio 5**. Probar que las siguientes bases son consistentes usando Tableaux y en cada caso dar el modelo canónico.

1. $A(p)$,$(\neg A \sqcup B)(p)$.

2. $R(p, a_1)$, $R(p, a_2)$, $R(p, a_3)$, $\top \sqsubseteq \leq 2R.\top$, $\top \sqsubseteq \geq 1R.\top$, $a_1 \neq a_2$.

3. $A_1(p)$, $R(p, q)$, $A_3(q)$, $\exists R.A_3 \sqsubseteq (\neg A_1 \sqcup A_2)$.

4. $R(c, a_1)$, $R(c, a_2)$, $C(c)$, $a_1 = a_2$, $C \sqsubseteq \geq 2R.\top$.

5. $R(c, a_1)$, $R(c, a_2)$, $C(c)$, $D(c)$, $a_1 \neq a_2$, $C \sqsubseteq \geq 2R.\top$, $D \sqsubseteq \leq 2R.\top$.

6. $\top(p)$, $\top \sqsubseteq \geq 2R.(C \sqcup D)$, $\top \sqsubseteq \leq 1R.C \sqcap \leq 1R.D$.

**Ejercicio 6 (Implementación Cálculo Proposicional)** Implementar el algoritmo de satisfactibilidad de una fórmula del cálculo proposicional usando los dos tipos de métodos vistos en clase:

1. usando el método de tablas de verdad de forma que ocupe espacio polinomial,
2. usando el método de Tableaux.

**Ejercicio 7 (Implementación $\mathcal{ALC}$)** Implementar el algoritmo de satisfactibilidad de un concepto en $\mathcal{ALC}$ teniendo en cuenta las siguientes variaciones en forma progresiva:

1. con respecto a una Tbox y una Abox vacias,
2. con respecto a una Tbox vacia y una Abox no vacia,
3. con respecto a una Tbox primitiva usando las reglas del reemplazo perezoso,
4. con respecto a una Tbox general usando bloqueo para asegurar terminación.